

как описания наиболее общего способа употребления терминов. Эти определения, в принципе, оправдывают достоинство философии как самостоятельной области знания, имеющей свой способ аргументации, о котором «разумеется, нам не следует говорить как о доказательстве в строгом смысле, но в философии есть процесс, аналогичный “линейному выводу”, при котором вещи постепенно приобретают ясность»¹⁹.

Подобное понимание практической цели философии как деятельности по прояснению системы терминов через продолжающееся конструирование системы когерентных определений более вероятно оказало влияние на трансформацию идей Витгенштейна. Во всяком случае, это явно прослеживается в концепции языкового значения как употребления, первоначально представленной Витгенштейном в «Голубой и коричневой книгах». Влияние, о котором говорится в «Философских исследованиях», скорее оказала именно общая установка Ф. П. Рамсея на практическое значение философии, чем производные от нее частные идеи.

Трактовка Ф. П. Рамсеем философии как «по существу системы определений» или «системы того, как можно дать определения»²⁰ имеет, конечно, гораздо больший смысл, нежели просто как предмет несогласия с Л. Витгенштейном. Важную роль здесь играет прагматистская концепция Ч. С. Пирса, концептуальный анализ Дж. Э. Мура и теория дескрипций Б. Рассела. Все эти концепции в разной степени связаны с точкой зрения Рамсея. Но это уже предмет другого исследования.

Л. Витгенштейн об экстенциональных функциях Ф. П. Рамсея

Темой данной статьи являются критические замечания, высказанные Витгенштейном по поводу предложений Ф. П. Рамсея, и ответы последнего на некоторые из них. Это позволяет точнее прояснить смысл экстенциональных функций и модификаций, предлагаемых Рамсеем в основаниях математики. С идеей экстенциональных функций (*function in extension*) Витгенштейн ознакомился через Шлика, который передал ему статью Рамсея «Основания математики» и попросил высказать свое мнение. Витгенштейн выразил свое несогласие и через Шлика передал

¹⁹ Там же. С. 301.

²⁰ Там же. С. 295.

письмо Рамсею со своими возражениями, ответ на которые хотел бы узнать и сам Шлик.

Критические замечания Л. Витгенштейна, представленные в этом письме, состоят из двух частей и касаются двух аспектов «Оснований математики» Рамсея. Во-первых, Витгенштейн критически анализирует понятие экстенциональной функции, предложенной Рамсеем, и скептически относится к тому, что $(\phi_e). \phi_e x \equiv \phi_e y$ можно рассматривать в качестве замены $x = y$. Во-вторых, он критически относится к использованию экстенциональных функций в контекстах существования.

В целом, и то, и другое направлено на критику того, как с помощью экстенциональных функций Рамсей пытается сохранить из «Principia Mathematica» Уайтхеда и Рассела то, что Витгенштейн считал бессмысленным и что связано с функционированием знака тождества. Второй аспект критики связан с первым и существенно зависит от того, как Витгенштейн понимает экстенциональные функции Рамсея в качестве замены знака тождества. Кроме того, этот второй аспект в большей степени связан с возможностью логически решить вопрос о количестве вещей в мире, вплоть до проблем с аксиомой бесконечности из «Principia Mathematica». К этой части критики Витгенштейна и связанной с ней проблемами мы обратимся позже, а здесь, поскольку нас интересует именно проблема тождества, пока остановимся на критике Витгенштейном понятия экстенциональных функций у Рамсея и возможности заменить ими понятие тождества. Это важно в связи с тем, что критика Витгенштейна и ответ на нее Рамсея позволит лучше понять, что имеется в виду в «Основания математики», а это, в свою очередь, позволит адекватно рассмотреть и остальную критику. В виду важности, приведем обширную цитату из письма Витгенштейна от 02.07.1927, касающуюся этого первого аспекта. Обращаясь к Рамсею, он пишет:

«Вы определяете $x = y$ как

$$(\phi_e). \phi_e x \equiv \phi_e y \dots \dots \dots Q(x, y)$$

и Вы оправдываете это Определение, утверждая, что $Q(x, y)$ является тавтологией всегда, когда “ x ” и “ y ” имеют одно и то же значение, и противоречием, когда они имеют разные значения.

Я попытаюсь показать, что это определение не выполняет того, для чего оно предназначено, пытаюсь сделать $x = y$ тавтологией или противоречием.

Ясно, что $Q(x, y)$ является логическим произведением. Пусть “ a ” и “ b ” будут двумя именами, имеющими различные значения. Тогда, среди членов нашего произведения, будут такие, что $f(a)$

означает p , а $f(b)$ означает $\sim p$. Назовем такую функцию критической функцией f_k . Теперь, хотя мы знаем, что “ a ” и “ b ” имеют разные значения, сказать, что $a=b$, все равно не может быть бессмысленным, если $a \neq b$ должно иметь какой-то смысл. Ибо, если $a = b$ было бы бессмысленным, то отрицательная пропозиция (т. е. отрицание того, что они имеют одно и то же значение) также была бы бессмысленной, *ибо отрицание бессмыслицы также является бессмыслицей*. Теперь ошибочно предположим, что $a = b$, тогда, посредством подстановки a вместо b , что должно быть вполне законным, если мы придали $a = b$ правильное значение, в нашем логическом произведении критическая функция $f_k(a)$ становится бессмысленной (будучи двусмысленной), а, следовательно, также и все произведение. С другой стороны, пусть “ c ” и “ d ” будут двумя именами, имеющими одно и то же значение, тогда истинно то, что $Q(c, d)$ становится тавтологией. Но предположим теперь (ошибочно) $c \neq d$, $Q(c, d)$ все еще остается тавтологией, ибо в нашем произведении отсутствует критическая функция. И даже если (чего сделать нельзя) можно было бы предположить, что $c \neq d$, существования критической функции f_k (такой, что $f_k(c)$ означает p , а $f_k(d)$ означает $\sim p$) предположить, конечно, нельзя, ибо знак $f_k()$ становится в этом случае бессмысленным. Следовательно, если $x = y$ является тавтологией или противоречием и корректно определяется посредством $Q(x, y)$, то $Q(a, b)$ было бы не противоречивым, а бессмысленным (поскольку это предположение, если оно является предположением, что “ a ” и “ b ” имеют одно и то же значение, делало бы критическую функцию бессмысленной). И следовательно $\sim Q(a, b)$ также было бы бессмысленным, ибо отрицание бессмыслицы есть бессмыслица.

В случае c и d , $Q(c, d)$ остается тавтологией, даже если можно предположить, что c и d являются различными (ибо в этом случае нельзя даже предположить существования критической функции).

Мой вывод: $Q(x, y)$ является весьма интересной функцией, но она не может быть подставлена вместо $x = y$ ²¹.

Что здесь имеется в виду? Во-первых, Витгенштейн рассматривает выражение $(\phi_e) \cdot \phi_e x \equiv \phi_e y$, записывая его в дальнейшем как $Q(x, y)$, в качестве определения $x = y$. Это утверждает и сам Рамсей, поскольку считает, что его «можно взять как определение $x = y$ »²². При этом $Q(x, y)$ — тавтология, если “ x ”

²¹ Ramsey F. P. Notes on Philosophy, Probability and Mathematics. Napoli: Bibliopolis, 1991. P. 339–340.

²² Рамсей Ф. П. Основания математики // Рамсей Ф. П. Философские работы. Томск: Изд-во Том. ун-та, 2003. С. 57.

и “ y ” имеют одинаковые значения, и противоречие — в противном случае. Во-вторых, Витгенштейн пытается показать, что если принять $Q(x, y)$ как замену $x = y$, то это все равно не сделает $x = y$ ни тавтологией, ни противоречием. С первым нельзя не согласиться, поскольку это имеет текстуальное подтверждение у Рамсея. Но насколько адекватно второе? Рассмотрим несколько подробнее аргументацию в пользу второго утверждения.

В пользу второго утверждения Витгенштейн рассматривает два случая: во-первых, два имени имеют разное значение; во-вторых, два имени имеют одинаковое значение. Рассмотрим первый случай. Аргументация здесь сводится к следующим шагам:

1) Пусть имена “ a ” и “ b ” имеют различные значения, т. е. $a \neq b$, тогда среди общности экстенциональных функций f_k , как их понимает Рамсей, согласно определению, найдется такая функция f_k которая с a сопоставляет p , а с b сопоставляет $\sim p$ (такую функцию Витгенштейн называет критической и обозначает f_k , т. е. $f_k(a)$ означает p , $f_k(b)$ означает $\sim p$).

2) Предположим, однако, пусть и ошибочно, что $a = b$. Несмотря на то, что это предположение ошибочно, оно все-таки не бессмысленно, поскольку если бы оно было бессмысленным, то бессмысленным было бы и его отрицание, т. е. $a \neq b$. Но если мы считаем выражение $a \neq b$ осмысленным, то осмысленным должно быть и его отрицание, т. е. $a = b$.

3) Теперь, если мы ошибочно предполагаем, что $a = b$, то критическая функция f_k становится бессмысленной, поскольку, с одной стороны, $f_k(a)$ должно обозначать p , а, с другой стороны, так как, следуя ошибочному предположению, мы можем заменить “ b ” на “ a ”, $f_k(a)$ должно обозначать $\sim p$. А этого не может быть в силу определения экстенциональных функций.

4) Но тогда, поскольку критическая функция является бессмысленной, бессмысленной становится и вся общность экстенциональных функций, поскольку, если один из членов логического произведения бессмыслен, то бессмысленно и все логическое произведение. Таким образом, ошибочное предположение $a = b$, делает бессмысленным выражение $Q(a, b)$, а вместе с тем и выражение $\sim Q(a, b)$, поскольку отрицание бессмыслицы есть бессмыслица. Значит и все выражение $Q(x, y)$ является не тавтологией или противоречием, но бессмыслицей.

Стало быть, осмысленное, пусть и ошибочное, предположение, что $a = b$, приводит к бессмысленным следствиям.

Второй случай еще интереснее:

1) Пусть имена “ c ” и “ d ” имеют одинаковое значение, т. е. $c = d$. Тогда, в силу определения экстенциональных функций, $Q(c, d)$ является тавтологией.

2) Предположим, что $c \neq d$. Это возможно, поскольку, если $c = d$ осмысленно должно быть осмысленно и его отрицание, т. е. $c \neq d$.

3) Но предполагая 2), мы должны также предполагать, что существует критическая функция f_k , такая, что $f_k(c)$ означает p , а $f_k(d)$ означает $\sim p$. Но таковой функции быть не может, поскольку даже при нашем ошибочном предположении, что $c \neq d$, $Q(c, d)$ все равно остается тавтологией, т. е. соответствующей критической функции просто не существует.

4) То есть, $c \neq d$ невозможно и даже лишено смысла в виду отсутствия f_k . Значит, невозможно, и даже лишено смысла, $c = d$.

Таким образом, получается, что ни при различии объектов, ни при их отождествлении критическая функция f_k не работает, поскольку, в первом случае, она становится бессмысленной, а, во втором случае, она становится, по крайней мере, излишней, поскольку, лишена смысла в силу ее невозможности. Значит, не работают и экстенциональные функции в смысле Рамсея, так как критическая функция, как ее понимает Витгенштейн, является их составной частью. Попытки представить $Q(x, y)$ в качестве замены $x = y$ представляются Витгенштейну абсолютно неоправданными, ни в случае $x = y$, ни в случае $x \neq y$. Возможность функции f_k для первого и второго случая здесь становится главным критерием. Вопрос для Витгенштейна заключается собственно в том, может ли $Q(x, y)$ заменить утверждения о возможном тождестве x и y .

Здесь следует отметить, что подобный критический подход к экстенциональным функциям Рамсея Витгенштейн, по-видимому, развивает непосредственно в духе своей критике концепции тождества, представленной им в «Логико-философском трактате», а именно: «Сказать о двух предметах, что они тождественны, бессмысленно, а сказать об *одном* предмете, что он тождественен самому себе, значит ничего не сказать»²³. В случае критических функций получается то же самое. Действительно, в случае нетождественности предметов, критическая функция становится бессмысленной, а в случае тождественности — невозможной. И здесь вся аргументация Витгенштейна сводится к тому, что, если тождество бессмысленно, бессмысленны и все его возможные способы выражения. Применение приспособлений, предназначенных для выражения тождественности или

²³ Витгенштейн Л. Логико-философский трактат. М.: Канон+. 2008. 5.5303.

нетождественности предметов, всегда приведет к тому же самому результату, поскольку попытка выразить бессмыслицу всегда приведет к бессмыслице. Приспособления, с помощью которых пытаются выразить бессмыслицу, сами являются бессмысленными, поэтому и использование выражения ' $Q(x, y)$ ' для замены выражения ' $x = y$ ' столь же бессмысленно, как и использование самого выражения ' $x = y$ '.

Аргументация Витгенштейна станет яснее, если учесть, как он понимает специфику предполагаемого тождества или различия a и b . В интерпретации Витгенштейна у Рамсея различие устанавливается не за счет различия некоторых действительных свойств обозначаемых объектов, речь идет о возможности различия объектов с помощью критической функции. Вопрос заключается собственно в том, можем ли мы использовать критическую функцию для отождествления и различия объектов точно так же, как в «Principia Mathematica» использовались знаки тождества и различия объектов. О том, что эти ситуации разные, рассматривая первый случай, пишет Саливэн: «Чтобы яснее видеть, как разворачивается аргументация, мы начнем с рассмотрения иной модели, где a и b , различаются посредством некоторого свойства G . Примем как данное, что Ga и $\sim Gb$. Поскольку я ошибочно уверен, что $a = b$, я не могу верить в оба эти факта; но я вполне могу знать один из них, скажем, что Ga . Будучи уверенным, что a есть b , мне безразлично, что предполагать истинным относительно a и b . Я буду принимать, что ' Ga ' и ' Gb ' представляют один и тот же факт. Поэтому, зная, что ' Ga ', я буду принимать, что ' Gb '. Я, разумеется, буду ошибаться, но здесь нет места для сомнения относительно природы моей ошибки. Она ясна, поскольку мое понимание свойства G никак не подорвано моим приписыванием этого свойства чему-то такому, что фактически им не обладает. Теперь противопоставим случай Витгенштейна. Снова задано, что a и b различны, что $f_k a$ есть p , $f_k b$ есть $\sim p$; и что я не знаю, что a отлично от b , и, следовательно, не знаю, что $\sim f_k a \equiv f_k b$. Я ошибочно предполагаю, что $a = b$. Поэтому, опять-таки, мне безразлично, предполагать ли истинность пропозиции $f_k a$ или истинность пропозиции $f_k b$, поскольку они для меня являются одной и той же пропозицией. Но какой пропозицией они являются для меня? Предполагаю ли я, ошибочно, что $f_k b$ есть пропозиция, что p , или же я предполагаю, что $f_k a$ есть пропозиция, что $\sim p$? Или же, зададим вопрос другим способом, если кто-то, кому я доверяю, уверяет меня в истинности $f_k a$, должен ли я прийти к уверенности, что p , или я должен прийти к уверенности, что $\sim p$? Если бы f_k была предикатом, на этот вопрос был бы готов ответ посредством

апелляции к моему пониманию этого предиката: является ли его значением то, что утверждается об x , т. е. $p(x)$ или $\sim p(x)$? f_k , разумеется, не имеет значение такого вида; мы “вообще отбросили” представление, что пропозиция $f_k x$ нечто постоянное относительно x . Даже если этот вопрос имеет ответ, он должен проистекать из моего понимания значения ‘ f_k ’, из моего знания, для какой пропозиции эта функция применяется к отдельным аргументам. Но теперь мы видим, что это знание не может преодолеть мою ошибку относительно тождества ее аргументов. Я не могу постичь f_k иначе как функцию, которая дает противоречащие пропозиции для аргументов a и b . Поэтому, предполагая, что a есть b , я вообще не могу понять f_k »²⁴. Аргументация Витгенштейна в интерпретации Саливэна вполне понятна, если мы основываемся на попытке заменить функцией $Q(x, y)$ тождество и различие объектов. Первый аргумент Витгенштейна прямо говорит, что такая попытка невозможна. Более того, при всем различии того, как работают экстенциональные функции и тождество, мы приходим к одному и тому же результату, а именно, к бессмысленности выражения тождества объектов через тождество свойств, как бы эти свойства не понимались. Тот же самый вывод касается и второго аргумента. Здесь опять необходимо учитывать характер различия и тождества обозначаемых объектов. Как пишет Саливэн: «Пусть “ c ” и “ d ” имеют одинаковое значение, так что $Q(c, d)$ становится тавтологией Рамсея; каждая экстенциональная функция отображает c и d в одну и ту же пропозицию, и не существует “критической функции” f_k , для которой $f_k c$ есть p , а $f_k d$ есть $\sim p$. Теперь, если $Q(c, d)$ является тавтологией, то она должна иметь противоречащее выражение, выражение, которое предполагается тем, кто предполагает, что $c \neq d$. Чем может быть это предположение? Принимая комплексность выражения Рамсея ‘ $\forall \phi_e. \phi_e c \equiv \phi_e d$ ’ за подлинное, необходимо предполагать и ‘ $\exists \phi_e. \sim \phi_e c \equiv \phi_e d$ ’, предполагать, что существует некоторая критическая функция f_k , которая различает c и d . Опять-таки, что представляет собой это предположение? Оно может быть предположением, что c имеет некоторое свойство, которого не имеет d , ибо, хотя этого было бы достаточно для ‘ $\exists \phi_e. \sim \phi_e c \equiv \phi_e d$ ’, это не является необходимым. По моему предположению эта критическая функция должна быть функцией, которую я понимаю через ее экстенциональность, понимаю как функцию, которая задается тождественностью своих аргументов и значений. То есть, я должен непосредственно понимать корреляцию f_k такую,

²⁴ Sullivan P. M. Wittgenstein on “The Foundations of Mathematics” of Ramsey // Theoria. Vol. LXI. Part 2. 1995. P. 139.

что f_k , относит $c (=d)$ к p , а $d (=c)$ к $\sim p$. Но ясно, что существования такой критической функции даже невозможно предположить»²⁵. Подобного рода критика разрушает эвристическую ценность экстенциональных функций Рамсея, но только в том случае, если мы принимаем, что функция $Q(x, y)$ действительно выражает именно тот смысл, который в PM выражается с помощью знака тождественности объектов. Так, например, Саливэн, с точки зрения приведенной выше критики, прямо в соответствии с афоризмом 5.5303 из «Логико-философского трактата» утверждает, что критика Витгенштейна обесмысливает экстенциональные функции Рамсея. Невозможность критической функции ни в случае, когда $a = b$, ни в случае, когда $a \neq b$ делает введение функции вроде $Q(x, y)$ бессмысленной, а, значит, бессмысленными становятся и все построения Рамсея, касающиеся этой функции. Выводы Саливэна вполне обоснованы, если $Q(x, y)$ понимается как содержательная замена тождества объектов, но $Q(x, y)$ не выражает тождества и различия x и y , роль данной функции, как утверждает Рамсей, совершенно иная.

Таким образом, оказывается, что принимая возможность использования функции $Q(x, y)$ вместо тождества, Витгенштейн считает, что она не может служить адекватной заменой выражений вроде ' $x = y$ ' или выражений вроде ' $x \neq y$ '. То есть, экстенциональные функции, хотя и допустимы, не могут быть использованы в качестве адекватной замены знака тождества, поскольку, принимая их в качестве таковых, мы приходим к бессмыслице. Но возникает вопрос, имел ли в виду Рамсей то, что имеет в виду Витгенштейн? Имел ли он в виду, что $Q(x, y)$ выражают тот же самый смысл, что и выражения с тождеством? Можно ли сказать, что экстенциональные функции Рамсея предназначены для того, чтобы выразить идею «Principia Mathematica» о тождественности и различии объектов в полном соответствии с тем, как согласно смыслу определению тождества неразличимых Лейбница, нам необходимо принять утверждение *13.01 из «Principia Mathematica»:

$$x = y =_{def} (\phi): \phi!x \supset \phi!y,$$

т. е. x и y тождественны, когда они удовлетворяют одним и тем же свойствам, и используется ли функция $Q(x, y)$ в этом же самом смысле?

Предварительно, Рамсей отвечает на этот вопрос в письме к М. Шлику в ответ на письмо, в котором были пересланы возра-

²⁵ Ibid. P. 138.

жения Витгенштейна. В этом письме от 22.07.27. относительно критики Витгенштейна, Рамсей пишет Шлику следующее: «Он, по-видимому, принимает мою точку зрения, что $Q(x, y)$ является тавтологией, когда “ x ” и “ y ” являются именами одной и той же вещи, и противоречием в противном случае, но, тем не менее, доказывает, что $Q(x, y)$ не может говорить, что x и y являются тождественными; поскольку, если, например, x и y являются различными и кто-то *perimpossible* может предположить их тождественность, это не было тем же самым, как предположение $Q(x, y)$. С этим я полностью согласен, но мне все равно кажется, что $Q(x, y)$ является адекватной подстановкой вместо $x = y$ как элемента логической записи. Мы всегда используем $x = y$ как часть обобщенной пропозициональной функции, и в каждом таком случае мы получим правильный смысл для результирующей общей пропозиции, если вместо этого мы подставим $Q(x, y)$ »²⁶.

Таким образом, Рамсей согласен с тем, что Витгенштейн правильно понимает характер его экстенциональных функций вроде $Q(x, y)$, как функций, выполняющих роль тавтологий и противоречий. Но, вместе с тем, Рамсей считает, что Витгенштейн неправильно понимает то, для чего эти функции предназначены. Действительно, если бы экстенциональные функции вида $Q(x, y)$ пытались бы сказать то же самое, что и выражения вроде ‘ $x = y$ ’ или ‘ $x \neq y$ ’, то критика Витгенштейна была бы вполне оправдана. Но главное в том, что Рамсей никогда и не предполагал заменить содержательный смысл тождества экстенциональными функциями. В том же письме он пишет следующее: «На самом деле я никогда не думал предполагать, что $Q(x, y)$ является способом говорить, что x и y являются тождественными. Я представлял, что Витгенштейн показал, что сказать нечто подобное невозможно. Я лишь предложил $Q(x, y)$ как замену для символа $x = y$, используемого в общих пропозициях и в определении классов»²⁷. Функции $Q(x, y)$ предназначаются Рамсеем лишь как символическое приспособление для того, чтобы заменить выражения, вроде ‘ $x = y$ ’ и ‘ $x \neq y$ ’, там, где они встречаются в «Principia Mathematica», но эти функции ничего не говорят о тождественности предметов. Да и в свете того, что Рамсей принимает критику Витгенштейном концепции тождества, это вряд ли было бы возможно предположить. Суть предложений Рамсея заключается в том, чтобы сохранить экстенциональность математики и, вместе с тем, теорию классов с помощью симво-

²⁶ Wittgenstein and the Vienna Circle. Oxford: Basil Blackwell, 1979. P. 191.

²⁷ Ibid. P. 191.

лического соглашения, иного, чем соглашение, принимаемое Витгенштейном. Это соглашение должно основываться на новом понятии математической тавтологии, предложенном Рамсеем.

На возражения Витгенштейна Рамсей ответил не только в письме к М. Шлику. Интересными в этом отношении являются черновики писем Рамсея к Витгенштейну, в которых он дает на его вопросы более развернутый ответ²⁸. В одном из черновиков писем Рамсей пишет:

«Я не уверен, понял ли я вообще вашу аргументацию, но, насколько я могу видеть, ваша позиция заключается в следующем. Я говорил, что $Q(x, y) \{ (\phi e). \phi ex \equiv \phi ey \}$ является тавтологией, когда “ x ” и “ y ” имеют одно и то же значение, и противоречием, когда они имеют разные значения. Это, я полагаю, вы не отрицаете (или отрицаете?), но вы говорите, что ошибочно делать вывод, что $Q(x, y)$ работает как определение $x = y$. Вы показываете, что $Q(x, y)$ не говорит, что x и y являются тождественными, чего я никогда и не думал делать. Все, что мне хотелось бы утверждать, заключается в том, что, когда $x = y$ встречается в записи Рассела как часть некоторой обобщенной функции, мы получаем правильное значение, подставляя $Q(x, y)$ вместо $x = y$ »²⁹.

Разъясняется это посредством примеров, которые используются в *ОМ*. Здесь Рамсей показывает, что действительно должны подразумевать его экстенциональные функции: «Так $(\exists x): fx. x \neq a$ подразумевает то, что обозначается посредством $(\exists x): fx. \sim Q(x, a)$, а $(\exists m, n). \hat{x}(\phi x) \in m. x \square (\psi x) \in n. m^2 = n^3 + 2$ есть то же самое, что и $(\exists m, n). x \square (\phi x) \in m. x (\psi x) \in n. Q(m^2, n^3 + 2)$... Также $Q(x, a) \vee Q(x, b)$ может использоваться для определения класса так же, как Рассел использует $x = a \vee x = b$ »³⁰. Здесь как раз видно, как именно используются экстенциональные функции для записи математических тавтологий. Экстенциональные функции используются Рамсеем лишь для того, чтобы показать, каким образом использования математических утверждений могут

²⁸ Познакомившись с возражениями Витгенштейна, Рамсей написал письмо Шлику. Но это был не единственный ответ. В архивном наследии Рамсея имеются два черновика писем к Витгенштейну, в которых содержится попытка развернутого объяснения того, что подразумевают экстенциональные функции и того, почему критика Витгенштейна к ним не относится. Датировка писем указывает на то, что Рамсей не успел закончить письмо и сообщить свою точку зрения в виду безвременной смерти. Тем не менее, эти черновики позволяют наиболее точно прояснить, что же подразумевалось под заменой тождества экстенциональными функциями.

²⁹ Ramsey F. P. Notes on Philosophy, Probability and Mathematics. Napoli: Bibliopolis, 1991. P. 342.

³⁰ Ibid. P. 343.

сделать содержательные утверждения, в которых они встречаются, истинными или ложными, в зависимости от того, будут истинными или ложными они сами. Изменение выражений типа ' $(\exists x):fx. x \neq a$ ' на выражение ' $(\exists x):fx. \sim Q(x, a)$ ' или выражений типа ' $(\exists x):fx. \sim Q(x, a)$, а $(\exists m, n). x \square (\phi x) \in m. x \square (\psi x) \in n. m^2 = n^3 + 2$ ' на выражение ' $(\exists m, n). x \square (\phi x) \in m. x \square (\psi x) \in n. Q(m^2, n^3 + 2)$ ', ничего не меняют в их содержании. Речь идет просто о том, что уточняется истинностная оценка всего выражения в соответствии с тем, как интерпретируется добавка вида $\sim Q(x, a)$ или $Q(m^2, n^3 + 2)$ соответственно. Тавтологичность или противоречивость данных выражений, что зависит от возможных значений переменных, будет просто уточнять тавтологичность или противоречивость всего выражения. Речь у Рамсея здесь идет не о том, что какие-то индивиды являются тождественными или различными. Речь идет о том, что при определенных значениях переменных мы получаем тавтологию, а при других значениях переменных — противоречие. Например, так работает ' $Q(m^2, n^3 + 2)$ ' при добавлении к ' $(\exists m, n). x \square (\phi x) \in m. x \square (\psi x) \in n$ ', когда определяется соотношение англичан и французов. Для одних значений m и n выражение ' $Q(m^2, n^3 + 2)$ ' становится тавтологией и, тем самым, не оказывает влияние на истинностное значение всего выражения $(\exists m, n). x \square (\phi x) \in m. x \square (\psi x) \in n. m^2 = n^3 + 2$ ', когда оно заменяется выражением $(\exists m, n). x \square (\phi x) \in m. x \square (\psi x) \in n. Q(m^2, n^3 + 2)$ для других значений m и n выражение ' $Q(m^2, n^3 + 2)$ ' становится противоречием, а значит, и все выражение $(\exists m, n). x \square (\phi x) \in m. x \square (\psi x) \in n. m^2 = n^3 + 2$ становится ложным, когда оно заменяется выражением ' $(\exists m, n). x \square (\phi x) \in m. x \square (\psi x) \in n. Q(m^2, n^3 + 2)$ '. То есть, экстенциональные функции служат не для того, чтобы отождествить один объект с другим объектом или различить эти объекты, но для того, чтобы иметь возможность разделить или отождествить значения используемых знаков. Это Рамсей утверждает далее в том же черновике письма еще более определено: «Если вы принимаете $Q(x, y)$ в качестве законного символа, я не вижу каким образом его можно отрицать. Его цель заключается не в том, чтобы сказать, что $x = y$, но в том, чтобы отсортировать одни пары значений от других»³¹. Таким образом,

³¹ Ibid. P. 343. В другом черновике письма к Витгенштейну Рамсей в несколько иных выражениях подразумевает то же самое: «Назовем (ϕe) . $\phi e x \equiv \phi e y$, как делаете Вы, $Q(x, y)$. Я говорю (1) $Q(x, y)$ является тавтологией всегда, когда “ x ” и “ y ” имеют одно и то же значение, и противоречием, когда они имеют разные значения. (2) что? следовательно, мы можем определить $x = y. = Q(x, y)$ Я полагаю, вы не оспариваете (1) (или оспариваете?), но говорите, что при условии (1) определение ошибочно. Если под этим Вы

Рамсей недвусмысленно заявляет, что $Q(x, y)$ это не простая замена того, что подразумевает ' $x = y$ ' или ' $x \neq y$ '. Здесь имеется в виду совершенно иное. Экстенциональные функции представляют собой лишь символическое приспособление, позволяющее сохранить из «Principia Mathematica» то, без чего невозможно дать логистическое обоснование математики, а именно, теорию классов и введение понятия чисел с помощью понятий логики. В этом отношении символическое приспособление в виде экстенциональных функций ничуть не хуже соглашения Витгенштейна, которым он предлагает заменить знак тождества и которое, как показывает Рамсей, весьма затруднительно провести последовательно.

Таким образом, главная задача Рамсея состоит в том, чтобы найти такой способ обоснования математики, который представлял бы ее в виде исчисления классов, и введение приспособления в виде экстенциональных функций служит исключительно этой цели. Поэтому, приписывание экстенциональным функциям такой задачи как выражение тождества предметов явно является ошибочным³².

Следует, однако, отметить, что неприятие Витгенштейном экстенциональных функций связано не только с неверной трактовкой задачи, для которой они предназначены. Сохранить классы с тем, чтобы спасти математику в том объеме, в котором

подразумеваете, что $Q(x, y)$ не говорит, что x и y тождественны, я всецело согласен. Я утверждаю только то, что подстановка $Q(x, y)$ вместо $x = y$ общую пропозицию, в которой $x = y$ является частью обобщенной функции (в записи Рассела), будет придавать всей пропозиции правильный смысл. Таким образом, впрямую на стр. 351–2 моей статьи $(\exists m, n). x \sqsubset (\phi x) \in m. x \sqsubset (\psi x) \in n. m^2 = n^3 + 2$, если мы подставляем $Q(m_2, n_3 + 2)$ вместо $m^2 = n^3 + 2$ мы получаем правильное значение всей пропозиции или (более простой случай) $(\exists x): fx. x \neq a$ Подразумевает тоже самое, что и $(\exists x): fx. \sim Q(x, a)$. Поэтому также и $Q(x, a) \vee Q(x, b)$ определяет класс, единственными членами которого являются a и b , точно так же как $x = a. \vee x = b$ используется Расселом. Если вы вообще принимаете $Q(x, y)$ как оправданный символ, мне кажется, что все должно быть правильно». (Ibid, P. 345–346).

³² Р. Фогелин, например, считает, что Витгенштейн совершенно неправильно понял смысл экстенциональных функций Рамсея, который считал их простыми символическими приспособлениями, что «позволяет представить предложения Рамсея в правильном свете. $Q(x, y)$ также является лишь символическим приспособлением, предназначенным для достижения особой цели. В частности, оно возвращает логике формальную силу, утраченную, когда Витгенштейн изгнал знак тождества... Насколько я могу видеть критика Витгенштейном предложения Рамсея либо основано на неправильном его понимании или приписывает ему цель, которую Рамсей очевидно исключал» (Fogelin R. J. Wittgenstein on Identity // Fogelin R. J. Philosophical Interpretations. Oxford University Press. P. 177).

она присутствует в *РМ*, представляется Витгенштейну вообще абсурдным в виду его антиэкстенционалистской установки. Уже в «Трактате» он писал: «Теория классов в математике совершенно излишня. Это связано с тем, что общность, употребляемая в математике, — не случайная общность»³³. Из этого афоризма ясно, что ни задача, поставленная Рамсеем, ни способ ее достижения не могли и не могут удовлетворить Витгенштейна. Действительно, способ построения классов, основанный на экстенциональных функциях, представляет общности, требуемые в математике, как совершенно произвольные, поскольку сами экстенциональные функции, как они определены в «Основаниях математики», являются абсолютно произвольными соотношениями предметов и пропозиций. Для Рамсея, в виду его экстенциональной установки на математику, это представляется совершенно естественным и даже необходимым, ибо, как пишет он, «только так мы можем предохранить ее от большевистской угрозы со стороны Брауэра и Вейля»³⁴. Однако в такой установке Витгенштейн находит ряд дефектов, на которые указывает в работах «Философская грамматика» и «Философские заметки», написанных в конце 1920-х — начале 1930-х гг. <...>

Витгенштейн здесь репродуцирует идею различия внутренних и внешних отношений, которая широко используется в системе «Трактата». Внутренние отношения образа к отображаемому показываются комплексностью образа, когда мы понимаем его смысл. Так, глядя на отображение в зеркале, мы однозначно можем судить о положении отображаемого без того, чтобы соотносить их каким-то внешним образом, например, одновременно наблюдая зеркальный образ и отображаемое с некоторой внешней позиции. Внутреннее отношение связывает зеркальный образ и отображаемое непосредственно за счет того, что они имеют одинаковую логическую комплексность, состоящую из элементов образа и их соотношений, с одной стороны, и элементов отображаемого и их соотношений, с другой. Именно поэтому положение тела в зеркале позволяет сделать непосредственный вывод о положении отображаемого тела. Совершенно не то происходит с картиной. Здесь соотношение изображенного и изображаемого требует внешней позиции, с точки зрения которой устанавливается изоморфизм структур. Глядя на картину, мы не можем непосредственно сказать зани-

³³ Витгенштейн Л. Логико-философский трактат. М.: Канон+. 2008. 6.031.

³⁴ Рамсей Ф. П. Основания математики // Рамсей Ф. П. Философские работы. С. 59.

мает ли точно такое же положение изображенное на нем тело в действительности. Нам необходимо соотнести изображенное и изображаемое. Так, смотрясь в зеркало, бессмысленно задавать вопрос, в каком положении я нахожусь, поскольку само зеркало показывает это положение, но если мы рассматриваем свой портрет, то, для того, чтобы судить об адекватности изображенного положения, мы, как правило, обращаемся к внешнему наблюдателю. Подобная метафора зеркала вполне применима к языку, поскольку Витгенштейн считает, что «предложение — образ действительности»³⁵, и этот образ находится во внутреннем отношении к тому, что отображается, т. е. факту. Поэтому предложение, как образ, должно адекватно отображать логическую сложность отображаемого без того, чтобы соотносить образ и факт каким-то внешним способом. То же самое касается функций и их аргументов как элементов любого предложения, по их логической сложности должны вычисляться возможные значения функций без того, чтобы соотносить их с аргументами функций внешним способом. Функция сама должна репрезентировать некоторое правило такого вычисления точно так же, как зеркало само показывает положение отображаемого тела.

Совершенно не то мы находим относительно экстенциональных функций Рамсея, поскольку по их логической сложности нельзя вычислить их возможные значения. Соотнесение здесь является абсолютно произвольным, аргументы, функции и значения не находятся во внутреннем отношении, но для своего построения требуют независимого соотнесения. Индивиды, выступающие в качестве аргументов экстенциональных функций, и пропозиции, выступающие в качестве их значений, имеют различную логическую сложность, и, стало быть, не могут находиться во внутренних отношениях. Если вернуться к метафоре зеркала, то экстенциональные функции Рамсея требуют внешнего наблюдателя, который соотносил бы их возможные аргументы и значения [...]

В «Философской грамматике» относительно экстенциональных функций Рамсея он пишет: «Чем же точно является определение функции посредством ее объема? Очевидно, что это группа определений, например,

$fa = p$ Def.

$fb = q$ Def.

$fc = r$ Def.

³⁵ Там же. 4.01.

Эти определения дают нам возможность подставить вместо известных пропозиций “*p*”, “*q*”, “*r*” знаки “*fa*”, “*fb*”, “*fc*»³⁶.

Здесь он, по сути, воспроизводит способ задания экстенциональных функций из *ОМ*, соотнося индивиды с пропозициями, но сомневается, что определенные таким образом Рамсеем для объяснения знака тождества они могут иметь какое-то значение. Действительно, с точки зрения Витгенштейна, «объяснение Рамсеем знака тождества есть как раз такое определение по объему»³⁷, но имеет ли такое определение какое-либо значимое употребление? Витгенштейн считает, что нет, поскольку «сказать, что эти три определения задают функцию $f(\xi)$ значит не сказать ничего, или сказать то же самое, что говорят эти три определения. Ибо знаки “*fa*”, “*fb*”, “*fc*” являются функцией и аргументом не в большей степени, чем функцией и аргументом являются слова “*Co (rn)*”, “*Co (al)*” и “*Co (lt)*”. (Здесь не имеет значения используются ‘аргументы’ “*rn*”, “*al*” “*lt*” где-нибудь еще в качестве слов или же нет.)»³⁸. Витгенштейн этим утверждением, по-видимому, подразумевает, что определения экстенциональных функций, так как понимает их он, в силу своей произвольности, ничего не объясняют и не могут объяснить относительно самих функций, но являются лишь произвольным соотношением одних знаков с другими, а произвольное употребление знаков ничего не объясняет и не может объяснить в рамках всей символической системы³⁹.

³⁶ Wittgenstein L. *Philosophical Grammar*. Oxford: Basil Blackwell, 1974 P. 316.

³⁷ Ibid. P. 316.

³⁸ Ibid. P. 317.

³⁹ В интерпретации критики Витгенштейном экстенциональных функций Рамсея на этот пункт в качестве главного указывает М. Мэрион. Он утверждает, что основное возражение Витгенштейна касается противопоставления стандартной, в смысле Дирихле, и нестандартной интерпретации функций. В изложении Мэриона, Дирихле считает, что функция должна определяться через произвольное соотношение своих аргументов и значений, тогда как нестандартная интерпретация должна основываться на способе построения функций, от которого, при задании аргументов, должны зависеть ее возможные значения. Возражения Витгенштейна на экстенциональные функции Рамсея как раз и связаны с таким противопоставлением, что, как считает Мэрион, имеет подтверждение в месте, где Витгенштейн ссылается на Дирихле непосредственно после метафоры с зеркалом. Так, Мэрион пишет: «Последующее показывает, что Витгенштейн ясно осознавал намерение Рамсея возобновить стандартную интерпретацию посредством введения своих экстенциональных функций. Метафора Витгенштейна скрывает глубокую приверженность к нестандартной интерпретации, поскольку она имеет смысл как критическое замечание только с этой точки зрения.

Неизвестно, как Рамсей ответил бы на эти возражения Витгенштейна, об этом лишь можно догадываться на основании его общей установки. Заметим, что главное заключается, видимо, в том, что эти возражения вообще не относятся к тому, что пытается сделать Рамсей. Во-первых, он не пытается объяснить с помощью экстенциональных функций знак тождества, как уже указывалось выше. Экстенциональные функции есть лишь приспособление, которое позволяет сохранить из «Principia Mathematica» то, что касается теории классов. Во-вторых, экстенциональные функции соотносят не знаки или их компоненты посредством определения, но реальные индивиды и пропозиции, что идет в разрез с тем, как интерпретирует это Витгенштейн. Попытка представить экстенциональные функции в виде номинальных определений, рассматривая их как конвенции по поводу употребления знаков, не соответствует духу того, что хочет с их помощью сказать Рамсей. Смысл экстенциональных функций не в том, что они произвольно соотносят элементы знаковой системы, но в том, что они произвольно соотносят то, что обозначают эти элементы. Витгенштейн здесь, по видимому, путает свою конвенцию относительно тождества из «Трактата», которая касается исключительно знаков, с приспособлением, которое Рамсей предназначает для индивидов и пропозиций для того, чтобы сохранить теорию классов.

Не удивительно тогда, что непосредственно после воспроизведения этой метафоры в *Философской грамматике* Витгенштейн упоминает понятие произвольной функции Дирихле: “Если концепция функции Дирихле имеет строгий смысл, она должна быть выражена в определении, которое использует таблицу, чтобы определить знаки функции как равнозначные” (Wittgenstein L. *Philosophical Grammar*. Oxford: Basil Blackwell, 1974. P. 315). Меня не интересует здесь, насколько оправдана эта точка зрения, но я просто хочу указать, что она связана с тем, что Витгенштейн должен сказать страницей далее относительно экстенциональных функций Рамсея» (Marion M. Wittgenstein and Ramsey on Identity // *From Dedekind to Gödel. Essays on Development of the Foundation of Mathematics*. — Kluwer Academic Publishers, 1995. P. 363). На этом основании Мэрион интерпретирует критику Витгенштейна в письме к Рамсею, считая ее вполне обоснованной с точки зрения антиэкстенционалистской установки Витгенштейна. В этом его интерпретация отличается от подхода Фогелина (см. предыдущее примечание), считающего, что Витгенштейн просто неправильно понял задачу, которую ставил перед собой Рамсей. Отметим, однако, что “глубокая приверженность к нестандартной интерпретации” у Витгенштейна этого периода в связи с критикой Рамсея явно не выражена, и, по-видимому, утверждения Мэриона о том, что с точки зрения этой тенденции должны истолковываться все замечания Витгенштейна относительно экстенциональных функций, должны восприниматься с долей критики.

В «Философских заметках» есть еще одно возражение. Витгенштейн пишет: «Замечательно, что в случае тавтологии или противоречия вы можете действительно говорить о смысле и значении в смысле Фреге. Если мы называем его свойство быть тавтологией значением тавтологии, тогда, способ которым она возникает, можно назвать смыслом тавтологии. Аналогично для противоречия. Если же, как предлагал Рамсей, знак '=' объясняется тем, что $x = x$ является тавтологией, а $x = y$ — противоречием, то мы можем сказать, что тавтология и противоречие здесь не имеют 'смысла'. Поэтому, если тавтология показывает нечто посредством того факта, что как раз *этот* смысл дает *это* значение, то тавтология *à la* Рамсей не показывает ничего, поскольку она является тавтологией по определению»⁴⁰. Это возражение вполне соответствует духу антиэкстенционалистской установке Витгенштейна с его приверженностью идее внутренних свойств, которые должны определять значения функции по характеру ее аргументов. Речь в этом замечании, видимо, идет о следующем. Тавтологии в смысле «Трактата» — это пропозиции, которые принимают значения истина при любом значении их конституент. При этом истинностное значение тавтологии как тавтологии вычисляется исключительно по логическим операциям, из которых она построена. В этом случае можно сказать, что пропозициональная функция, соответствующая тавтологии, предопределяет ее значение, вычисляемое по характеру логических операций. Функция связывает внутренним отношением аргументы и значения. Например, пропозиция ' $p \supset \sim \sim p$ ' является тавтологией, при этом ее значение полностью определяется посредством смысла логических операций ' \supset ' и ' \sim ', с помощью которых построена функция распределения истинностных значений. Здесь способ построения функции однозначно задает значение выражения ' $p \supset \sim \sim p$ ', т. е. аргументы и значения функции, с точки зрения Витгенштейна, соотнесены внутренним отношением, поскольку аргументы и значения функции можно однозначно определить по способу ее построения. Здесь вполне понятна ссылка на введенное Г. Фреге различие смысла и значения выражений. Согласно цитате значением тавтологии будет истина, а ее смыслом — способ распределения истинностных значений ее конституент, заданный соответству-

⁴⁰ Wittgenstein L. *Philosophical Grammar*. Oxford: Basil Blackwell, 1974. P. 141–142; Marion M. Wittgenstein and Ramsey on Identity // *From Dedekind to Gödel. Essays on Development of the Foundation of Mathematics*. Kluwer Academic Publishers, 1995. P. 141–142.

ющей пропозициональной функцией, соотносящей значений конституент со значением всей пропозиции. В этом отношении объяснение Рамсеем знака '=', конечно, не будет удовлетворять определению тавтологии у Витгенштейна, поскольку функция $Q(x, y)$ не содержит в себе способа построения значения функции по характеру ее аргумента. В интерпретации Витгенштейна она действительно является произвольной конвенцией. Отметим, однако, что Рамсей и не претендовал на то, что с помощью его экстенциональных функций могут строиться тавтологии, имеющие тот же самый смысл, который под логическими тавтологиями подразумевал Витгенштейн. Наоборот, Рамсей считал, что наряду с логическими тавтологиями в строго определенном Витгенштейном смысле могут существовать специфические математические тавтологии, которые позволяют уточнить истинностное значение утверждений не только с точки зрения распределения истинностных значений, но и с точки зрения количества существующих вещей в мире.

Подведем итоги. Против экстенциональных функций Рамсея Витгенштейн выдвигает три возражения: 1. функция $Q(x, y)$ не является адекватной заменой тождества, поскольку приводит, как и сам знак тождества, к бессмысленным следствиям; 2. функция $Q(x, y)$ собственно не является функцией, поскольку не отражает внутреннего отношения, в котором должны находиться аргументы и значения функции, а является произвольной конвенцией или определением; 3. пропозиции, построенные с помощью этой функции не могут рассматриваться как тавтологии или противоречия в логическом смысле, поскольку их истинностное значение не вычисляется посредством логических операций. Но, как мы попытались показать, критические замечания Витгенштейна бьют мимо цели. Во-первых, функция $Q(x, y)$ у Рамсея не является заменой знака тождества, но представляет собой символическое приспособление, позволяющее сохранить теорию классов. Во-вторых, критика Витгенштейна связана с его антиэкстенционалистской установкой, направленной на то, чтобы вообще исключить теорию классов из математики. Но это противоречит намерениям Рамсея, его функция $Q(x, y)$ имеет принципиально экстенциональный характер. В-третьих, Рамсей не пытается представить выражения, построенные с помощью функции $Q(x, y)$, как логические тавтологии, но считает их специфическими математическими тавтологиями.

